Sujet de Thèse

- **Titre :** Produits de matrices aléatoires dépendants d'un paramètre.
- **Unité de recherche :** IRMAR, UMR-6625
- **Thème :** Systèmes dynamiques aléatoires
- **Mots clefs :** Dynamique aléatoire, exposants de Lyapunov, localisation d'Anderson, cocycle aléatoire, opérateur de Schrodinger aléatoire.
- **Les noms, prénoms et courriel du directeur de thèse**

Directeur Victor KLEPTSYN, victor.kleptsyn@univ-rennes1.fr.

Co-directeur Christophe DUPONT, christophe.dupont@univ-rennes1.fr.

Objectif de la thèse

L'objet de thèse sera d'étudier de produits aléatoires de matrices dépendants d'un paramètre. Soit $J = [a, b] \subset R$ un intervalle et $A_1(\cdot), \ldots, A_n(\cdot), \ldots$ des éléments aléatoires dans $C^1(J, SL(k, R))$ identiquement distribués. Que peut-on dire presque sûrement des exposants de Lyapunov du produit de matrices $A_i(E)$ en tant que fonctions du paramètre $E \in J$?

Un théorème fameux de Furstenberg des années 1960 implique que, sous certaines hypothèses de généricité, pour presque tout paramètre E il existe $\lambda_{1,F}(E) > 0$ tel que presque sûrement

$$\frac{1}{n} \log \|A_1(E)A_2(E) \ldots A_n(E)\| \to \lambda_{1,F}(E), \quad n \to \infty.$$

Par contre, un résultat récent de Anton Gorodetski et de Victor Kleptsyn dit que en dimension $k = 2$, sous certains hypothèses (y compris l'absence de hyperbolicité uniforme), presque surement il existe un ensemble aléatoire G_δ-dense $X = X(\omega) \subset J$ tel que pour tout $E \in X$ on a

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|A_1(E)A_2(E) \ldots A_n(E)\| = 0.$$

Ce résultat est rélié à la localisation d'Anderson en dimension un, ainsi qu'aux travaux de Artur Avila, David Damanik, et beaucoup d'autres chercheurs sur des cocycles et des operateurs de Schrödinger aléatoires. Sa preuve se base très fortement sur l'étude de la dynamique sur le cercle $S^1 = P(R^2)$ (sur lequel toutes les matrices $A_i(E)$ agissent).

Le premier but sera d'étudier le cas de produit de matrices symplectiques. Ce cas correspond à l'opérateur de Schrödinger discret aléatoire dans une bande de taille finie, $\{1, \ldots, L\} \times Z$, et devrait pouvoir être étudié par les mêmes méthodes, mais avec l'indice de Maslov pour les sous-espaces lagrangiens au lieu de nombre de rotation sur le cercle $S^1 = P(R^2)$.

Puis, il sera très intéressant d'étudier le cas des matrices génériques en dimension k. Soient $\lambda_{1,F} \geq \lambda_{2,F} \geq \cdots \geq \lambda_{k,F}$ les exposants de Lyapunov du produit de matrices $A_i(E)$. Des arguments non-rigoureux prédisent que chaque exposant $\lambda_j(E)$ avec $j \in \{2, \cdots, k-1\}$ pourra "sauter" jusqu'à $(\lambda_{j-1,F} + \lambda_{j,F})/2$ et "chuter" jusqu'à $(\lambda_{j,F} + \lambda_{j+1,F})/2$ pour des valeurs exceptionnelles de E.