

Sujet de Thèse

- Titre : Solutions régulières et solutions singulières des Equations de Navier-Stokes avec une viscosité turbulente,
- Unité de recherche : IRMAR, UMR-6625,
- Thème : Mécanique des fluides mathématique,
- Mots clefs : Équations de Navier-Stokes, Équations d'Euler, analyse fonctionnelle,
- Directeur de thèse : Roger Lewandowski, Roger.Lewandowski@univ-rennes1.fr.

Objectif de la thèse

On considère le système d'équations de Navier-Stokes posé dans \mathbb{R}^3 ,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \operatorname{div}(A \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = 0, & \text{(i)} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{(ii)} \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}), u_3(t, \mathbf{x}))$ est la vitesse du fluide, $p = p(t, \mathbf{x})$ sa pression, $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\nu > 0$ est la viscosité cinématique et $A = A(t, \mathbf{x})$ une viscosité turbulente. On note $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{t=0}$ la donnée initiale, qui vérifie $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$.

Lorsque $A = 0$, il y a de nombreux travaux dans lesquels on montre l'existence locale en temps d'une solutions régulières en fonction de la régularité de la donnée initiale, voir par exemple dans [1, 2, 3] et de nombreuses autres références. On sait aussi que quand la donnée initiale est assez petite en un certain sens, cette solution est globale en temps. Enfin, on sait montrer l'existence d'une solution faible globale lorsque $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ [3].

Dans [4] on étudie le cas $A \neq 0$. On montre que quand $A \geq 0$, $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+, W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3))$ et est à support compact en espace, uniformément par rapport au temps, alors pour $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, le système (1) admet une solution faible globale, obtenue par approximations. L'existence d'une solution régulière locale en temps est un problème ouvert. Dans cette thèse, on cherchera des conditions suffisantes sur A pour montrer l'existence d'une solution régulière locale en temps, et savoir à quelles condition cette solution peut être prolongée pour tout $t \in [0, \infty[$. Il serait intéressant de construire un exemple d'une fonction A pour laquelle la solution régulière développe une singularité en temps fini. On s'intéressera aussi au problème asymptotique quand $\nu \rightarrow 0$ et " $A \rightarrow 0$ ", dans un sens à préciser.

References

- [1] J.-Y Chemin. About weak-strong uniqueness for the 3D incompressible Navier-Stokes system. *Comm. Pure Appl. Math.*, 64(12):1587–1598, 2011.
- [2] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16:269–315, 1964.
- [3] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63(1):193–248, 1934.
- [4] R. Lewandowski. Navier-Stokes Equations in the whole space with an eddy viscosity. *À paraître*, 2017.