

Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique de modèles dissipatifs multi-échelles: EDO à variété centrale et modèles cinétiques

Directeurs de thèse: Philippe Chartier et Mohammed Lemou

17 décembre 2016

Le contexte général de cette thèse concernera une classe de modèles d'évolution dont la dynamique peut "se décomposer" en deux étapes : une relaxation rapide (exponentielle) vers une variété centrale suivie d'une dynamique plus lente sur cette variété. Les modèles qui seront ciblés dans ce cadre peuvent être typiquement classés dans l'une des catégories suivantes :

- Dans un premier temps, on se focalisera sur un modèle d'EDO, à variété centrale, du type

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z) \\ \dot{z} &= -\frac{1}{\varepsilon}z + g(x, z)\end{aligned}\tag{1}$$

qui intervient notamment en écologie (dynamiques des populations). Le théorème de la variété centrale assure, pour (1), que le système tend rapidement vers une variété centrale et la dynamique devient lente à l'approche de cette variété.

- Ensuite, on s'intéressera à une classe de modèles cinétiques collisionnels décrits par des EDP de la forme

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon}Q(f)\tag{2}$$

qui interviennent en dynamique des gaz et des plasmas. L'inconnue $f = f(t, x, v)$ étant la fonction distribution des particules. L'opérateur de collision Q est en général un opérateur négatif mais possédant un noyau, et son action principale est de ramener la fonction distribution vers un équilibre thermodynamique dans ce noyau pour y subir une évolution plus lente (les premiers ordres en ε sont donnés par les équations de type Euler et Navier-Stokes pour la dynamique des gaz). Cette évolution est de ce point de vue similaire à la dynamique avec variété centrale décrite ci-dessus.

Le travail de thèse suivra essentiellement les étapes suivantes :

1. Des travaux récents ont permis d'écrire des algorithmes de calcul formel (B-séries) qui déterminent la variété centrale vers laquelle la solution du problème (1) converge exponentiellement, mais ces développements asymptotiques ne sont valables que pour ε relativement petit. Le premier but de cette thèse sera de développer des nouvelles approches *multi-échelles* (valables pour toutes les valeurs de $\varepsilon \in [0, 1]$), en s'inspirant des méthodes déjà bien développées dans le cadre des problèmes hautement oscillants. En particulier, une formulation double échelle sera écrite pour ce type de modèle dans le but d'y séparer les dynamiques lentes et rapides. En partant de cette formulation, des schémas numériques dont la précision ne dépend pas de ε seront construits et implémentés. On parle dans ce cas de schémas UA (Uniformly Accurate).
2. En deuxième lieu, il s'agira d'explorer la faisabilité de ces stratégies dans le cadre des équations cinétiques de la forme (2). Un premier objectif sera de comprendre l'applicabilité et les conséquences du théorème de la variété centrale dans ce domaine, qui est une question qui n'a jamais été explorée dans le passé à notre connaissance. Une formulation double-échelle séparant les variables lentes et rapides sera également explorée pour la première fois dans ce contexte. Enfin, en s'appuyant sur ce nouveau formalisme, on construira des méthodes numériques capables de capturer les différentes échelles de dissipations (aussi raides soient elles) avec une précision uniforme (UA) sans en augmenter la complexité numérique. Des simulations numériques multi-échelles efficaces, basées sur cette étude, seront réalisées sur des modèles de type (2).