

Sujet de These

- **Titre** : Factorisation des opérateurs différentiels en caractéristique p
- **Unité de recherche** : IRMAR, UMR-6625
- **Thème** : Calcul formel
- **Mots clefs** : Algorithmes, opérateurs différentiels
- **Les noms, prénoms et courriel du directeur de thèse**

Directeur : Xavier Caruso (xavier.caruso@normalesup.org)

Objectif de la thèse

Une équation différentielle linéaire homogène est une équation de la forme $L(y) = 0$ avec

$$L = a_d(x)\partial^d + a_{d-1}(x)\partial^{(d-1)} + \cdots + a_1(x)\partial + a_0(x)$$

où les $a_i(x)$ sont des fonctions données et la variable ∂ agit par la dérivation. L'objet L que l'on vient d'introduire est appelé un *opérateur différentiel*. Classiquement, les équations et les opérateurs différentiels s'étudient à l'aide d'outils analytiques. Toutefois, il existe un pendant purement algébrique de la théorie qui permet de donner un sens aux équations différentielles définies sur n'importe quel corps et notamment sur des corps de caractéristique positive. Il devient ainsi possible, lorsque l'on part d'une équation différentielle pour laquelle les fonctions $a_i(x)$ sont des polynômes à coefficients entiers, de la réduire modulo p pour tout nombre premier p puis de l'étudier à travers ses diverses réductions.

Il se trouve que, dans le cas de la caractéristique positive, la situation est plus riche d'un point de vue algébrique car l'anneau (non commutatif) des opérateurs différentiels possède une structure supplémentaire : c'est une algèbre d'Azumaya. Concrètement, cela permet d'utiliser les outils de l'algèbre linéaire et du calcul matriciel pour approcher les opérateurs différentiels. Typiquement, en caractéristique positive toujours, on arrive à définir un analogue du polynôme caractéristique dans le cadre différentiel. Ceci permet d'étudier ces opérateurs de manière plus poussée, aussi bien du point théorique que du point de vue algorithmique.

L'objectif de la thèse sera de mettre à profit cette structure d'algèbre d'Azumaya pour concevoir et d'implémenter des algorithmes efficaces — de complexité si possible quasi-linéaire — pour la factorisation des opérateurs différentiels définis sur des courbes algébriques en caractéristique positive.